Classificazione dei blow-up in dimensione due

Proposizione 1. *Sia D un aperto in $\mathbb{R}^2$ e $u : D \to \mathbb{R}$ ($u \geq 0$ in D) un minimo locale di $\mathcal{F}$ in D. Sia $x_0 \in \partial\{u > 0\} \cap D$. Allora, ogni blow-up u_0 di u nel punto x_0 è della forma*

$$u_0(x) = (x \cdot \nu)_+\,,$$

dove $\nu \in \partial B_1 \subset \mathbb{R}^2$ è un vettore che a priori dipende sia da x_0 che dalla successione di blow-up.

Proof. Sappiamo che:

- $u_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione non-negativa e Lipschitz continua su $\mathbb{R}^2$;
- u_0 è 1-omogenea; in particolare, possiamo scrivere u_0 in coordinate polari come
$$u_0(r, \theta) = r\phi(\theta),$$
dove la funzione $\phi : \partial B_1 \to \mathbb{R}$ è non-negativa e lipschitziana;
- u_0 è armonica su $\{u_0 > 0\}$; in particolare, ϕ è C^∞ su $\{\phi > 0\}$ e
$$-\partial_{\theta\theta}\phi(\theta) = \phi(\theta) \quad \text{per ogni} \quad \theta \in \{\phi > 0\} \cap \partial B_1.$$

Sia ora (a, b) una componente connessa di $\mathbb{S}^1$. Allora, (a, b) è necessariamente un intervallo di lunghezza π

$$b = a + \pi$$

e $\phi(\theta)$ è della forma

$$\phi(\theta) = C \sin(\theta - a) = C\Big(\sin a\, \cos\theta + \cos a\, \sin\theta\Big).$$

Ora, osserviamo che l'insieme $\{\phi > 0\}$ è composto da un solo intervallo di lunghezza π. Infatti, se ce ne fossero due intervalli disgiunti, allora

$$|\{u_0 > 0\} \cap B_1| = |B_1|,$$

e quindi u_0 sarebbe armonica in B_1, ma questo è impossibile perché $u_0 \geq 0$ su ∂B_1 (e non è identicamente nulla), mentre $u_0(0) = 0$.

Quindi, abbiamo

$$u_0(x) = C\,(x \cdot \nu)_+,$$

dove ν è il vettore

$$\nu = (\sin a, \cos a).$$

Infine, usando la formula della variazione interna, otteniamo

$$|\nabla u_0| = 1 \quad \text{su} \quad \partial\{u_0 > 0\}.$$

Siccome

$$|\nabla u_0| = C|\nu| = C,$$

otteniamo che $C = 1$. □